

**Избранное**

**Математические игры и развлечения**

*А.П.Доморяд*

Издательство «Школьник»

Волгоград, 2003 год

ББК 22.1я2я72

Г96

Доморяд Александр Петрович

**Математические игры и развлечения**

**Избранное**

Редактор Копылова А.Н.

Техн. редактор Мурашова Н.Я.

Корректор Сечейко Л.О.

Сдано в набор 26.09.2003. Подписано к печати 4.12.2003. Формат 84×108¼. Физ. печ. л. 8.375. Условн. печ. л. 13.75. Уч -изд. л. 12.82. Тираж 200 000 экз. заказ №979. Цена книги 50 руб.

Доморяд А.П.

Математические игры и развлечения: Избранное. – Волгоград: ВГПУ, 2003. – 20 с.

В книге представлены избранные задачи из монографии Доморяда А.П. «Математические игры и развлечения», которая была издана в 1961 году Государственным издательством физико-математической литературы г.Москвы.

**ISBN 5-09-001292-X                                                                                     ББК 22.1я2я72**

**©** Издательство «ВГПУ», 2003

Оглавление

[Солитер 4](#_Toc8121052)

[Определение задуманного числа по трем таблицам 5](#_Toc8121053)

[Сложение и вычитание вместо умножения 6](#_Toc8121054)

[Функция [*x*] (целая часть *x*) 7](#_Toc8121055)

[Фигуры из кусочков квадрата 8](#_Toc8121056)

[Магические Квадраты 9](#_Toc8121057)

[Приложение 10](#_Toc8121058)

[Рисунок 1 1](#_Toc8121061)

[Рисунок 2 3](file:///C:\Users\Сергей%20Устинов\Desktop\Практическая%208-9(1).docx#_Toc8121062)

[Рисунок 3 4](file:///C:\Users\Сергей%20Устинов\Desktop\Практическая%208-9(1).docx#_Toc8121063)

[Рисунок 4 4](file:///C:\Users\Сергей%20Устинов\Desktop\Практическая%208-9(1).docx#_Toc8121064)

*Предисловие*

*Из разнообразного материала, объединяемого различными авторами под*

*общим названием математических игр и развлечений, можно выделить*

*несколько групп "классических развлечений", издавна привлекавших внимание*

*математиков:*

1. *Развлечения, связанные с поисками оригинальных решений задач,*

*допускающих практически неисчерпаемое множество решений; обычно*

*интересуются установлением числа решений, разработкой методов, дающих*

*большие группы решений или решения, удовлетворяющие каким-нибудь*

*специальным требованиям.*

1. *Математические игры, т.е. игры, в которых двое играющих рядом "ходов",*

*делаемых поочередно в соответствии с указанными правилами, стремятся к*

*определенной цели, причем оказывается возможным для любого исходного*

*положения предопределить победителя и указать, как - при любых ходах*

*противника - он может добиться победы.*

1. *"Игры одного лица", т.е. развлечения, в которых с помощью ряда операций,*

*выполняемых одним игроком в соответствии с данными правилами, надо*

*достигнуть определенной, заранее указанной цели; здесь интересуются*

*условиями, при которых цель может быть достигнута, и ищут наименьшее*

*число ходов, необходимых для ее достижения.*

*Классическим играм и развлечениям посвящена большая часть этой книги.*

*Каждый может попытаться, проявив настойчивость и изобретательность,*

*получить интересные (свои!) результаты.*

*Если такие классические развлечения, как, например, составление "магических*

*квадратов" могут оказаться по душе сравнительно узкому кругу лиц, то*

*составление, например, симметричных фигур из деталей разрезанного*

*квадрата, поиски числовых курьезов и т.п., не требуя никакой математической*

*подготовки, могут доставить удовольствие и любителям, и "не любителям"*

*математики. То же можно сказать и о развлечениях, требующих подготовки в объеме 9-11 классов средней школы.*

*Многие развлечения и даже отдельные задачи могут подсказать любителям математики темы для самостоятельного исследования.*

*В целом книга рассчитана на читателей с математической подготовкой в*

*объеме 10-11 классов, хотя большая часть материала доступна*

*девятиклассникам, а некоторые вопросы - даже учащимся 5-8классов.*

*Многие параграфы могут быть использованы преподавателями математики*

*для организации внеклассной работы.*

*Разные категории читателей могут по-разному использовать эту книгу: лица,*

*не увлекающиеся математикой, могут познакомиться с любопытными*

*свойствами чисел, фигур и т.п., не вникая в обоснование игр и развлечений,*

*принимая на веру отдельные утверждения; любителям математики советуем*

*изучать отдельные места книги с карандашом и бумагой, решая предлагаемые*

*задачи и отвечая на отдельные вопросы, предложенные для размышления.*

# Солитер

Игра под названием ***солитер*** проводится на доске с тридцатью тремя клетками. Такую доску легко получить, прикрыв шахматную доску листом картона с крестообразным вырезом.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | 73 | 74 | 75 |  |  |
|  |  | 63 | 64 | 65 |  |  |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
|  |  | 23 | 24 | 25 |  |  |
|  |  | 13 | 14 | 13 |  |  |

На рисунке каждая клетка обозначена парой чисел, указывающих номера горизонтального и вертикального рядов, на пересечении которых находится клетка. В начале игры все клетки, за исключением какой-нибудь одной, заняты шашками.

Требуется снять 31 шашку, причем, задаются пустая «начальная» клетка (*a,b*) и «конечная» (*c,d*), на которой должна оказаться уцелевшая в конце игры шашка. Правила игры таковы: любая шашка может быть снята с доски, если рядом с ней (в горизонтальном или вертикальном направлении) находится с одной стороны какая-нибудь шашка («снимающая»), а с противоположной стороны – пустая клетка, на которую «снимающая» шашка должна быть при этом переведена.

Из теории игры следует, что решение будет в том и только в том случае, когда a≡c (mod 3) и b≡d (mod 3).

Приведем для примера решения задачи, в которой клетка (44) является и начальной, и конечной.

1. 64-44
2. 56-54
3. 44-64
4. 52-54
5. 73-53
6. 75-73
7. 43-63
8. 73-53
9. 54-52
10. 35-55
11. 65-45
12. 15-35
13. 45-25
14. 37-35
15. 57-37
16. 34-36
17. 37-35
18. 25-45
19. 46-44
20. 23-43
21. 64-44
22. 56-54
23. 44-64
24. 52-54
25. 73-53
26. 75-73
27. 43-63
28. 73-53
29. 54-52
30. 35-55
31. 64-44

Здесь в записи каждого хода указаны для «снимающей» шашки номер исходной

клетки и номер клетки, на которую она ставится (при этом с доски снимается шашка, стоящая на промежуточной клетке).

Попробуйте снять 31 шашку:

1. При начальной клетке (5,7) и конечной (2,4);
2. При начальной клетке (5,5) и конечной (5,2).

# Определение задуманного числа по трем таблицам

Разместив в каждой из трех таблиц подряд числа от 1 до 60 так, чтобы в первой таблице они стояли в трех столбцах по двадцати чисел в каждом, во второй – в четырех столбцах по 15 чисел в каждом и в третьей – пяти столбцах по 12 чисел в каждом (см. рис. 1), легко быстро определить задуманное кем-нибудь число N (N≤60), если будет указаны номера α, β, γ столбцов, содержащих задуманное число в 1-й, 2-й и 3-й таблицах: N будет ровно остатку от деления числа 40α+45β+36γ на 60 или, другими словами, N будет ровно меньшему положительному числу, сравнимому с суммой (40α+45β+36γ) по модулю 60. Например, при α=3, β=2, γ=1:

40α+45β+36γ≡0+30+36≡6 (mod60),т.е. N=6.



Рисунок 1

Аналогичный вопрос может быть решен для чисел в пределах до 420, размещенных в четырех таблицах с тремя, четырьмя, пятью и семью столбцами: если - номера столбцов, в которых задуманное число, то оно равно остатку от деления числа 280α+105β+336γ+120δ на 420.

# Сложение и вычитание вместо умножения

До изобретения таблиц логарифмов для облегчения умножения многозначных чисел применялись так называемые ***простаферетические*** таблицы (от греческих слов «простезис» - прибавление и «афайрезис» - отнятие), представляющие собой таблицы значений функции при натуральных значениях z. Так как при *a* и *b* целых (числа *a+b* и *a-b* либо оба четные, либо оба нечетные, в последнем случае дробные части у и одинаковы), то умножение *a* и *b* сводится к определению *a+b* и *a-b* и, наконец, разности чисел и , взятых из таблицы.

Для перемножения трех чисел можно воспользоваться тождеством:

(\*)

из которого следует, что при наличии таблицы значений функции вычисление произведение *abc* можно свести у определению чисел: *a+b+c, a+c-b, b+c-a* и по ним – при помощи таблицы – правой части равенства (\*).

Приведем в качестве примера такую таблицу для . В таблице даны: крупными цифрами – значения а мелкими – значения *k*, где при

.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | **Единицы** | | | | | | | | | |
|  |  | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
| **Десят-ки** | **0** |  | 01 | 08 | 13 | 216 | 55 | 90 | 147 | 218 | 309 |
| **1** | 4116 | 5511 | 720 | 9113 | 1148 | 14015 | 17016 | 20417 | 2430 | 28519 |
| **2** | 3338 | 38521 | 44316 | 50623 | 5760 | 6511 | 7328 | 8203 | 91416 | 10165 |

Нетрудно, пользуясь формулой (\*) и таблицей, получить:

,

(проверьте!).

# Функция [*x*] (целая часть *x*)

Функция [*x*] равна наибольшему целому числу, не превосходящему *x* (*x –* любое действительное число). Например:

1

2

3

4

x

-4

-3

-2

-1

1

2

3

-1

-2



Рисунок 2

.

Функция [*x*] имеет «точки разрыва»: при целых значениях *x* она «изменяется скачком».

На рис. 2 дан график этой функции, причем левый конец каждого из горизонтальных отрезков принадлежит графику (жирные точки), а правых – не принадлежит.

Попробуйте [доказать](#доказательство), что если каноническое разложение числа *n*! есть

Аналогичные формулы имеют место для

Зная это, легко определить, например, сколькими нулями оканчивается число 100! Действительно, пусть . Тогда

И .

Следовательно, 100! Делится на , т.е. оканчивается двадцатью четырьмя нулями.

# Фигуры из кусочков квадрата

К числу полезных и увлекательных развлечений относится составление фигур из семи кусочков квадрата, разрезанного в соответствие с рис. 3, (а), причем при составлении заданных фигур должны быть использованы все семь кусочков, и они не должны налегать, даже частично, друг на друга.

(а)

(b)

На рис. 4 приведены симметричные фигуры**[[1]](#footnote-1)**. Попробуйте сложить эти фигуры из частей квадрата, изображенного на рис. 3, (а).

Рисунок 3

Из этих же чертежей можно складывать и многие другие фигуры (например, изображения различных предметов, животных и т.п.).

Рисунок 4

Менее распространенным вариантом игры является составление фигур из кусочков квадрата, изображенного на рис. 3, (b).

# Магические Квадраты

*Магический квадрат «n2-квадратом»* назовем квадрат, разделенный на *n2* клеток, заполненных первыми *n2* натуральными числами так, что суммы чисел, стоящих в любом горизонтальном или вертикальном ряду, а также на любой из диагоналей квадрата, равны одному и тому же числу .

Если одинаковы лишь суммы чисел, стоящих в любом горизонтальном или вертикальном ряду, то квадрат называется *полу магическим*.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 16 | 3 | 2 | 13 |
| 5 | 10 | 11 | 8 |
| 9 | 6 | 7 | 12 |
| 4 | 15 | 14 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 6 | 7 | 2 |
| 1 | 5 | 9 |
| 8 | 3 | 4 |

Магический 42-квадрат назван именем Дюрера, математика и художника XVI века, изобразившего квадрат на известной картине «Меланхолия». Кстати, два нижних средний числа этого квадрата образуют число 1514 – дату создания картины.

[Существует лишь восемь девятиклеточных магических квадратов](#приложение). Два из них, являющиеся зеркальным изображением друг друга, приведены на рисунке; остальные шесть могут быть получены из этих квадратов вращением их вокруг центра на 90°, 180°, 270°.

# Приложение

1. Как известно, *n! =* 1 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 4 ∙ 5 ∙…∙ (*n* – 2) ∙ (*n* – 1) ∙ *n* (\*\*).

Если перебирать по порядку эти множители, то через каждые *p1* «шагов» будут встречаться множители, кратные простому числу *p1*; число их равно , но из них множителей делятся на , – делятся на и т.д.

Следовательно, число множителей в равенстве (\*\*), в состав которых множитель *p1* входит ровно один, два, три и т.д. раза, соответственно равно числам:

и т.д.

Поэтому … =

1. Нетрудно полностью исследовать вопрос о магических квадратах при n = 3.

Действительно, Sn  = 15, и существует лишь восемь способов представления числа 15

в виде суммы различных чисел (от единицы до девяти):

15 = 1+5+9 = 1+6+8 = 2+4+9 = 2+5+8 = 2+6+7 = 3+4+8 = 3+5+7 = 4+5+6

1. Фигуры заимствованы из книги В. И. Обреимова «Тройная головоломка» [↑](#footnote-ref-1)